

Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 2

Produktformel für Erwartungswerte

(Buch S. 61)

Sind X_1, X_2 unabhängig mit Werten in S_1 bzw. S_2 ,
dann gilt für Mengen $A_1 \subset S_1, A_2 \subset S_2$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Anders geschrieben:

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1) \cdot \mathbf{1}_{A_2}(X_2)] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)] \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_2}(X_2)]$$

In Worten:

Der Erwartungswert des Produktes von $\mathbf{1}_{A_i}(X_i)$, $i = 1, 2$
ist das Produkt der Erwartungswerte.

Wir werden gleich sehen, dass allgemeiner gilt:

Sind X_1, X_2 unabhängig,
und h_1, h_2 reellwertige “Verarbeitungen”, dann gilt:

Der Erwartungswert des Produktes $h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)$
ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte.

Genauer:

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2 ,
 h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.

Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,
so folgt

$$\mathbf{E}[h_1(X_1)h_2(X_2)] = \mathbf{E}[h_1(X_1)] \mathbf{E}[h_2(X_2)] .$$

(“Produktformel für Erwartungswerte”)

Beweis (hier nur für diskrete ZV'e):

$$\mathbf{E}[h_1(X_1)h_2(X_2)]$$

$$= \sum_{a_1, a_2} h_1(a_1)h_2(a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1, a_2} h_1(a_1) \mathbf{P}(X_1 = a_1) h_2(a_2) \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1) \mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2} h_2(a_2) \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[h_1(X_1)] \mathbf{E}[h_2(X_2)] \quad \square$$